

Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ o scriere arbitrară a numerelor $1, 2, 3, \dots, 2022$. Arătați că printre numerele $|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, \dots, |a_{2022} - 2022|$ există cel puțin două numere egale.

Subiectul 2.

a) Arătați că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}).$$

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1^2 - 1}}} + \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2^2 - 1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2023} - 1) + \sqrt{1011}.$$

Subiectul 3.

a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $4x^2 + 4y^2 + 4xy = 75$. Determinați cea mai mare valoare pe care o poate lua suma $x + y$.

Subiectul 4.

Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, $VA \neq AB$ și $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Dacă punctele M, N, P, Q sunt proiecțiile vârfului V al piramidei pe bisectoarele unghiurilor VAB, VCB, VAD , respectiv VCD , arătați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

b) Fie R mijlocul lui $[VO]$, S mijlocul lui $[BR]$, iar $T \in [AO]$ astfel încât $AT = 3 \cdot TO$. Arătați că $TS \parallel (VCD)$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

**Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
BAREM DE CORECTARE CLASA A VIII-A**

Subiectul 1.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ o scriere arbitrară a numerelor 1, 2, 3, ..., 2022. Arătați că printre numerele $|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, \dots, |a_{2022} - 2022|$ există cel puțin două numere egale.

Soluție :

Avem $|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, \dots, |a_{2022} - 2022| \in \{0, 1, 2, \dots, 2021\}$ 1p

Presupunem, prin absurd, că numerele $|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, \dots, |a_{2022} - 2022|$ sunt distincte. Atunci $\{|a_1 - 1|, |a_2 - 2|, \dots, |a_{2022} - 2022|\} = \{0, 1, 2, \dots, 2021\}$ 2p

Avem $S = |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_{2022} - 2022| = 0 + 1 + \dots + 2021 = \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 2021 \cdot 1011$, deci

S este un număr impar.....2p

Dar un număr și modulul lui au aceeași paritate. Deci S are aceeași paritate cu numărul $(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \dots + (a_{2022} - 2022) = 0$. Așadar S este număr par, contradicție.....2p

Subiectul 2.

a) Arătați că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}).$$

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2^2 - 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2023} - 1) + \sqrt{1011}.$$

Soluție:

a) Egalitatea dată devine

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1})} \Leftrightarrow (\sqrt{k+1} + \sqrt{k-1})^2 = 2(k + \sqrt{k^2 - 1})$$

$$\Leftrightarrow 2k + 2\sqrt{k^2 - 1} = 2k + 2\sqrt{k^2 - 1}, \text{ adevărat.....3p}$$

b) Aplicând a) pentru $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și adunând relațiile ecuația devine:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2023} + \sqrt{2022} - 1) \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = \sqrt{2023} + \sqrt{2022} - 1 \dots\dots\dots 2p$$

Observăm că $x = 2022$ este soluție.....1p

Pentru $x < 2022 \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} < \sqrt{2023} + \sqrt{2022} - 1$.

Pentru $x > 2022 \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} > \sqrt{2023} + \sqrt{2022} - 1$.

Deci $x = 2022$ este singura soluție.....1p

Subiectul 3.

a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $4x^2 + 4y^2 + 4xy = 75$. Determinați cea mai mare valoare pe care o poate lua suma $x + y$.

Soluție :

a) $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$, adevărat...3p

b) $4x^2 + 4y^2 + 4xy = 75 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4xy = 75 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) + 2(x + y)^2 = 75$ 1p

Utilizând inegalitatea de la a), obținem

$$75 = 2(x^2 + y^2) + 2(x + y)^2 \geq 3(x + y)^2 \Rightarrow (x + y)^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x + y \leq 5 \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

Pentru $x = y$, în relația din ipoteză obținem: $12x^2 = 75 \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{2}$ 1p

Pentru $x = y = \frac{5}{2}$ obținem $x + y = 5 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ valoarea maximă a sumei $x + y$ este 5.....1p

Subiectul 4.

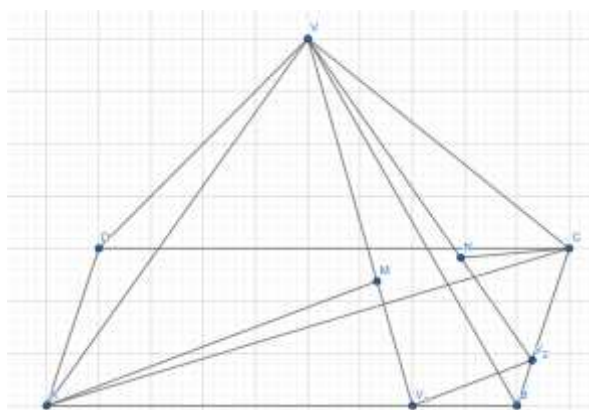
Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, $VA \neq AB$ și $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Dacă punctele M, N, P, Q sunt proiecțiile vârfului V al piramidei pe bisectoarele unghiurilor VAB, VCB, VAD , respectiv VCD , arătați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

b) Fie R mijlocul lui $[VO]$, S mijlocul lui $[BR]$, iar $T \in [AO]$ astfel încât $AT = 3 \cdot TO$. Arătați că $TS \parallel (VCD)$.

Soluție :

a) Fie $VM \cap AB = \{V_1\}, VN \cap BC = \{V_2\}$. În ΔVAV_1 , AM este simultan înălțime și bisectoare, deci ΔVAV_1 este isoscel de bază $[VV_1]$.





60 de ani

Colegiul Național
„Vasile Lucaciu”



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Așadar $[AM]$ va fi și mediană, deci M este mijlocul lui $[VV_1]$. Analog N este mijlocul lui $[VV_2]$. Deci MN este linie mijlocie în $\triangle VV_1V_2 \Rightarrow MN \parallel V_1V_2 \dots\dots\dots 2p$

$$\left. \begin{array}{l} VA = AV_1 \\ \text{Dar } VC = CV_2 \\ VA = VC \end{array} \right\} \Rightarrow AV_1 = CV_2.$$

$$\text{Deci } \frac{AV_1}{AB} = \frac{CV_2}{BC} \stackrel{R.Th.}{\Rightarrow} V_1V_2 \parallel AC \dots\dots\dots 1p$$

Deci $MN \parallel AC$ și analog $PQ \parallel AC \Rightarrow MN \parallel PQ \Rightarrow M, N, P, Q$ sunt coplanare.....1p

b) Fie $BR \cap VD = \{X\}, TR \cap CV = \{Y\}$. Aplicăm teorema lui Menelaus succesiv în următoarele triunghiuri :

$$i) \triangle VDO \text{ cu transversala } X-R-B \Rightarrow \frac{XV}{XD} \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{RO}{RV} = 1 \Rightarrow \frac{XV}{XD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{XV}{VD} = \frac{1}{3}.$$

$\quad \quad \quad =2 \quad \quad =1$

$$ii) \triangle BDV \text{ cu transversala } V-R-O \Rightarrow \frac{VX}{VD} \cdot \frac{OD}{OB} \cdot \frac{RB}{RX} = 1 \Rightarrow \frac{RB}{RX} = 3 \Rightarrow \frac{2RS}{RX} = 3 \Rightarrow \frac{RS}{RX} = \frac{3}{2}. \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

$\quad \quad \quad =\frac{1}{3} \quad \quad =1$

$$iii) \triangle VOC \text{ cu transversala } T-R-Y \Rightarrow \frac{YV}{YC} \cdot \frac{TC}{TO} \cdot \frac{RO}{RV} = 1 \Rightarrow \frac{YV}{YC} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{YV}{VC} = \frac{1}{6}$$

$\quad \quad \quad =5 \quad \quad =1$

$$iv) \triangle TYC \text{ cu transversala } V-R-O \Rightarrow \frac{VY}{VC} \cdot \frac{OC}{OT} \cdot \frac{RT}{RY} = 1 \Rightarrow \frac{TR}{RY} = \frac{3}{2}. \quad (2) \dots\dots\dots 1p$$

$\quad \quad \quad =\frac{1}{6} \quad \quad =4$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Din (1), (2)} \Rightarrow TS \parallel XY \\ \quad \quad \quad XY \subset (VCD) \end{array} \right\} \Rightarrow TS \parallel (VCD) \dots\dots\dots 1p$$

